Trimestre Septiembre-Diciembre 2007
Departamento de Cómputo Científico y Estadística
Probabilidades para Ingenieros — CO3121
Guía de ejercicios # 6

Contenido

- Valor Esperado, Caso Discreto.
- Valor Esperado, Caso Continuo.
- Varianza, Covarianza y Correlación.

Ejercicios

1. Suponga que dos variables aleatoria (X, Y) se distribuyen de manera uniforme en un círculo con radio a. La función densidad de probabilidad conjunta es, entonces, f(x,y)=$\frac{1}{\pi a^2}$, $x^2 + y^2 \leq a^2$, y 0 en cualquier otro caso. Encuentre el valor esperado de X, μx.

2. Una moneda está cargada de manera que la probabilidad de ocurrencia de una cara es tres veces mayor que la de una cruz. Encuentre el número esperado de cruces cuando se lanza dos veces esta moneda.

3. Al invertir en unas acciones particulares, en un año un individuo puede obtener una ganancia de 4000 dólares con probabilidad de 0,3, o tener una perdida de 1000 dólares con probabilidad de 0,7. ¿Cuál es la ganancia esperada por esta persona?.

4. Sea X una variable aleatoria con la siguiente distribución de probabilidad:

x	-3	6	9
f(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

   Encuentre $\mu_{g(X)}$, donde $g(X) = (2X + 1)^2$.

5. Una variable aleatoria X tiene la función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

   Encuentre el valor esperado de $g(X) = e^{2X/3}$.

6. Suponga que X y Y tiene la siguiente función de probabilidad conjunta:

f(x,y)		x: 2	4
	1	0.10	0.15
y	3	0.20	0.30
	5	0.10	0.15

Encuentre el valor esperado de $g(X, Y) = XY^2$.

Encuentre μ_X y μ_Y.

7. Sean X y Y variables aleatorias con función de densidad conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 < x, y < 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Encuentre el valor esperado de $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

8. La distribución del número de imperfecciones por 10 metros de tela sintética está dada por

x	0	1	2	3	4
f(x)	0,41	0,37	0,16	0,05	0,01

a) Grafique la función de probabilidad.
b) Encuentre el número de imperfecciones esperado $E(X) = \mu$.
c) Encuentre $E(X^2)$.

9. Encuentre la desviación estándard de la variable aleatoria $g(X) = (2X+1)^2$ del ejercicio 4.17.

10. Dada una variable aleatoria X, con desviación estandard σ_X y una variable aleatoria $Y = a + bX$, demuestre que si $b < 0$, el coeficiente de correlación $p_{XY} = -1$, y si b¿0, $pxy = 1$.

11. Si la función de densidad conjunta de X y Y está dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{7}(x + 2y), & 0 < x < 1, 1 < y < 2 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

encuentre el valor esperado de $g(X, Y) = \frac{X}{Y^3} + X^2Y$.

12. Las variables aleatorias X y Y representan el número de vehículos que llegan a dos esquinas de calles separadas durante cierto periodo de 2 minutos en el día. La distribución conjunta es:

$$f(x,y) = \frac{1}{4^{(x+y)}}\frac{9}{16},$$

para $x = 0, 1, 2, \ldots,$

a) Determine, $E(X), E(Y), Var(X), Var(Y)$.

b) Considere $Z = X + Y$, la suma de ambas. Encuentre $E(Z)$ y $Var(Z)$.

13. Se crean 70 nuevos puestos de trabajo en una planta de ensamble automotriz; pero 1000 aspirantes solicitan los 70 puestos. Para seleccionar a los 70 mejores entre los aspirantes, la armadora aplica un examen que cubre habilidad mecánica, destreza manual y capacidad matemática. La calificación media de este examen resulta 60, y las calificaciones tienen una desviación estándar de 6.¿ Una persona que tiene una calificación de 84 puede obtener uno de los trabajos?. [Sugerencia: utilice el teorema de Chebyshev.] Suponga que la distribución es simétrica alrededor de la media.

14. Si X y Y son variables aleatorias independientes con varianzas $\sigma_X^2 = 5$ y $\sigma_Y^2 = 3$, encuentre la varianza de la variable aleatoria
$Z = -2X + 4Y - 3$.

15. Una variable aleatoria X tiene una media μ=10 y una varianza $\sigma^2 = 4$. Utilizando el teorema de Chebyshev, encuentre
a) $P(|X - 10| \geq 3)$;
b) $P(|X - 10| < 3)$;
c) $P(5 < X < 15)$;
d) el valor de la constante c tal que

$$P(|X - 10| \geq c) \leq 0,04$$

.

16. Calcule $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$, donde X tiene la función de densidad $f(x) = 6x(1 - x)$, $0 < x < 1$, y 0 en cualquier otro caso, compare con el resultado dado por el teorema de Chebyshev.

17. Las variables aleatorias X y Y son la proporción del tiempo que la línea 1 y la línea 2 están en funcionamiento, respectivamente. La función de densidad de probabilidad conjunta para (X, Y) está dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2 + y^2), & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a) Determine X y Y son independientes o no.

b) Resulta interesante saber algo acerca de la proporción de $Z = X + Y$, la suma de las dos proporciones. Encuentre $E(X + Y)$ y $E(XY)$.

c) Encuentre $Var(X)$, $Var(Y)$ y $Cov(XY)$.

d) Encuentre $Var(X + Y)$.

18. Una empresa industrial desarrolló una máquina con un buen rendimiento de combustible para limpiar alfombras, que deja las alfombras más limpias con mucha rapidez. Nos interesa una variable aleatoria Y, la cantidad en galones por minuto que ofrece. Se sabe que la función de densidad está dada por:

$$f(y) = \begin{cases} 1, & 1 \leq y \leq 8 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

a) Grafique la función de densidad.

b) Calcule $E(Y)$, $E(Y^2)$ y $Var(Y)$.

c) Calcule $E(e^Y)$ utilizando:

$E(e^Y) = \int_7^8 e^y f(y)dy$.

d) Calcule $E(e^Y)$ sin utilizar $f(y)$, sino usando el ajuste de segundo orden para la aproximación de primer orden de $E(e^Y)$. Haga comentarios.

e) Se requiere encontrar $Var(e^Y)$. Defina $Z = e^Y$. Encuentre:

$$Var(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2.$$

f) Repita el apartado anterior, utilizando la aproximación de Taylor de primer orden para $Var(e^Y)$.

19. Suponga que X y Y tienen la función de probabilidad definida como:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1/2 & x = 2, y = 10 \\ 1/6 & x = -7, y = 10 \\ 1/12 & x = 2, y = 12 \\ 1/12 & x = -7, y = 12 \\ 1/12 & x = 2, y = 14 \\ 1/12 & x = -7, y = 14 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Calcule cada uno de los siguientes valores esperados:

a) $E(X)$
b) $E(Y)$
c) $E(X^2)$
d) $E(Y^2)$
e) $E(X^2 + Y^2)$
f) $E(XY - 4Y)$

20. Sea $X \sim Bernoulli(\theta_1)$ e $Y \sim Binomial(n, \theta_2)$. Calcule $E(4X - 3Y)$.

21. Sea $Y \sim Binomial(100, 0, 3)$ y $Z \sim Poisson(7)$. Calcule $E(Y + Z)$.

22. Sea $X \sim Binomial(80, \frac{1}{4})$ e $Y \sim Poisson(\frac{3}{2})$. Asumiendo que X y Y son independientes, calcule $E(XY)$.

23. Suponga que empieza con ocho céntimos y lanza una moneda equilibrada repetidamente. Si sale cara, usted conserva todos sus céntimos, pero si sale cruz pierde la mitad de los que tiene. Sea X el número total de céntimos que tiene al final del juego. Calcule $E(X)$.

24. Sea $X \sim$ Geométrica(θ). Calcule $E(X^2)$

25. Sea X e Y con la función densidad conjunta
$f_{X,Y}(x, y) = 4x^2y + 2y^5$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, y 0 en cualquier otro caso.
Calcule cada uno de los siguientes valores esperados.
a) $E(X)$
b) $E(Y)$
c) $E(3X + 7Y)$
d) $E(X^2)$
e) $E(Y^2)$
f) $E(XY)$
g) $E(XY + 14)$

26. Sea $X \sim Uniforme[3, 7]$ e $Y \sim Exponencial(9)$. Calcule $E(-5X - 6Y)$.

27. Sea $X \sim Uniforme[-12, -9]$ e $Y \sim N(-8, 9)$. Calcule $E(11X + 14Y + 3)$.

28. Sea $Y \sim Exponencial(9)$ y $Z \sim Exponencial(8)$. Calcule $E(Z + Y)$.

29. Suponga que X sigue la distribución de $Pareto(\alpha)$, para $\alpha > 1$. Demuestre que $E(X) = 1/(\alpha - 1)$. ¿Cual es el $E(X)$ cuando $0 < \alpha \le 1$?.

30. Considere que X sigue una distribución $Beta(a, b)$. Demuestre que $E(X) = a/(a + b)$.

31. Suponga que X y Y tienen la función de probabilidad definida como:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/2 & x=3, y=5 \\ 1/6 & x=3, y=9 \\ 1/6 & x=6, y=5 \\ 1/6 & x=6, y=9 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Con $E(X) = 4,\ E(Y) = 19/3,\ y\ E(X,Y) = 26$
Calcule cada uno de los siguientes resultados:

a) $cov(X,Y)$
b) $var(X)$ y $var(Y)$
c) $corr(X,Y)$

32. Suponga que las variables X e Y con la función densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y) = 15x^3y^4 + 6x^2y^7$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, 0 en cualquier otro caso.
Calcule $E(X), E(Y), var(X), var(Y), cov(X,Y)$ y $corr(X,Y)$

33. Sean Y y Z dos variables aleatorias independientes, cada una de ellas con varianza positiva. Demuestre que $corr(Y,Z) = 0$

34. Sean X, Y y Z tres variables aleatorias, y suponga que X y Z son independientes. Demuestre que $cov(X+Y,Z) = cov(Y,Z)$.

35. Sea $X \sim Exponencial(3)$ y $Y \sim Poisson(5)$. Suponga que X e Y son independientes y que $Z = X + Y$.

a) Calcule $cov(X,Z)$.
b) Calcule $corr(X,Z)$.

36. Demuestre que la varianza de la distribución $Uniforme[L,R]$ viene dada por la expresión $(R-L)^2/12$.

37. Demuestre que la varianza de la ditribución $Geometrica(\theta)$ tiene por expresión $(1-\theta)/\theta^2$. (Sugerencia: utilize $((1-\theta)^x)'' = x(x-1)(1-\theta^{x-2})$.

38. Considere que $X \sim Pareto(\alpha)$, para $\alpha > 2$. Demuestre que $Var(X) = \alpha/((\alpha-1)^2(\alpha-2))$.

39. Sea $X \sim Beta(a,b)$ Demuestre que:

$$var(X) = ab/((a+b)^2(a+b+1))$$